MODEL GETARAN BANGUNAN *N*-LANTAI UNTUK $N \geq 1$ DAN ANALISIS RESPONS STRUKTUR AKIBAT GAYA KINETIK GEMPA BUMI

Oleh :
Nughthoh Arfawi Kurdhi , Wijiyanto
STMIK Duta Bangsa Surakarta

ABSTRAK

Gempa bumi terjadi karena adanya pelepasan tenaga yang tersimpan secara tiba-tiba dari batu-batu di bawah permukaan bumi dan menghasilkan gelombang getaran (seismic wave). Gelombang getaran ini akan menjadi gaya kinetik yang menyebabkan struktur-struktur bangunan di atasnya ikut bergerak. Gerakan yang terjadi pada bangunan akibat gaya kinetik gempa bumi adalah berupa getaran (osilasi) di sekitar titik kesetimbangan, yaitu posisi pada saat bangunan dalam keadaan diam. Getaran yang terjadi pada bangunan tersebut analog dengan getaran pada sistem massa-pegas. Dengan demikian, getaran bangunan akibat gempa bumi dapat ditransformasikan dalam model matematika.

Pada penelitian ini dikonstruksi model getaran bangunan satu lantai dan bangunan bertingkat atau N-lantai. Dalam bidang struktur dinamik, penyederhanaan proses perhitungan dilakukan untuk memudahkan pengolahan data. Struktur bangunan satu lantai dapat disederhanakan dengan mengidealisasikan bangunan tersebut sebagai sistem dengan derajat kebebasan tunggal (Single Degree of Freedom, SDOF), sedangkan getaran struktur bangunan lebih dari satu lantai dapat disederhanakan dengan mengidealisasikan bangunan tersebut sebagai sistem dengan derajat kebabasan banyak (Multiple Degree of Freedom, MDOF).

Hasil penelitian menunjukkan bahwa model getaran bagunan satu lantai adalah $\ddot{x}(t) + 2\beta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\ddot{x}_g(t)$*, sedangkan model getaran bangunan N-lantai dirumuskan* $[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = -[m][1]\ddot{x}_g$. *Berdasarkan grafik data gempa yang ada, pergerakan tanah yang terjadi akibat gempa merupakan gerak harmonik, sehingga gaya eksternal dapat didekati dengan fungsi periodik. Pada penelitian ini gaya tersebut didekati dengan fungsi sinus* $\ddot{x}_g(t) = A_m \sin\varpi t$ *dan deret Fourier* $P(t) = m\ddot{x}_g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\varpi t + b_n \sin n\varpi t\right)$. *Hasil simulasi grafik menunjukkan bahwa semakin besar massa bangunan, maka semakin besar pula perpindahan maksimum yang dihasilkan, sedangkan semakin besar kekakuan bangunan, maka semakin kecil perpindahan maksimum yang dihasilkan.*

Kata kunci: model, gempa, struktur, sdof, mdof.

PENDAHULUAN

Gempa bumi terjadi karena adanya pelepasan tenaga yang tersimpan secara tiba-tiba dari batu-batu di bawah permukaan bumi dan menghasilkan gelombang getaran (*seismic wave*). Gelombang getaran ini akan menjadi gaya kinetik yang diteruskan sampai ke permukaan tanah yang dilewatkan oleh media tanah dan batu. Gaya tersebut kemudian dipindahkan ke struktur-struktur bangunan di atasnya sehingga ikut bergerak.

Gerakan yang terjadi pada bangunan akibat gaya kinetik gempa bumi adalah berupa getaran (osilasi) di sekitar titik kesetimbangan, yaitu posisi pada saat bangunan dalam keadaan diam. Getaran yang terjadi pada bangunan tersebut analog dengan getaran pada sistem massa-pegas. Dengan demikian, getaran bangunan akibat gempa bumi dapat ditransformasikan dalam model matematika. Model matematika yang dapat menggambarkan getaran bangunan dikenal sebagai gerak harmonik. Pada kenyataannya, suatu bangunan berosilasi karena adanya gaya kinetik gempa bumi dan akan berhenti pada suatu saat seiring dengan berkurangnya gaya tersebut. Dengan demikian, getaran yang terjadi merupakan gerak harmonik teredam terpaksa. Terdapat gaya gesek (*friction*) antara bangunan dengan media di sekitarnya. Gaya gesek tersebut akan melawan gaya luar yang menyebabkan bangunan berosilasi, sehingga osilasi semakin lama semakin mengecil dan akhirnya bangunan kembali pada posisi diamnya.

Struktur bangunan dengan berbagai jumlah lantai dapat memiliki perilaku getaran yang berbeda. Perbedaan ini dapat ditentukan dengan menganalisis dan membandingkan perilaku model getaran dari masing-masing struktur bangunan tersebut. Perilaku model getaran tersebut dapat dipelajari melalui konsep kesetimbangan dan kestabilan serta respons struktur yang terjadi. Respons struktur dapat dilihat melalui perpindahan, kecepatan, serta percepatan struktur bangunan, baik respons relatif (terhadap waktu) maupun respons maksimum.

Dalam bidang struktur dinamik, penyederhanaan proses perhitungan sering dilakukan untuk memudahkan pengolahan data. Struktur bangunan satu lantai dalam proses perhitungan dapat disederhanakan dengan mengidealisasikan bangunan tersebut sebagai sistem dengan derajat kebebasan tunggal (*Single Degree of Freedom*, SDOF). Akan lebih sulit menurunkan dan menganalisis model getaran struktur bangunan N-lantai, untuk $N > 1$. Setiap lantai dari bangunan dapat memiliki massa dan daya elastisitas (kekakuan) berbeda ketika terjadi guncangan. Selain itu, gaya kinetik gempa bumi yang berlaku pada setiap lantai juga berbeda. Dengan demikian, getaran struktur bangunan lebih dari satu lantai dapat disederhanakan dengan mengidealisasikan bangunan tersebut sebagai sistem dengan derajat kebabasan banyak (*Multiple Degree of Freedom*, MDOF).

TINJAUAN PUSTAKA

Menurut Robert (1997), Gelombang getaran gempa bumi akan menjadi gaya kinetik yang diteruskan sampai ke struktur-struktur bangunan di atasnya. Gaya tersebut menyebabkan struktur bangunan bergetar (berosilasi). Haberman (1977) menyatakan bahwa osilali (getaran) adalah gerak bolak-balik di sekitar suatu titik setimbang dengan lintasan yang sama secara periodik (berulang dalam rentang waktu yang sama). Osilasi disebut juga sebagai gerak harmonik.

Setiap struktur bangunan dapat mengalami osilasi yang berbeda terhadap beban dinamik dengan kekuatan gaya yang sama. Menurut Craig (1981) salah satu faktor yang mempengaruhi perilaku osilasi bangunan adalah derajat kebebasannya (*degree of freedom*). Setiap struktur bangunan memiliki derajat kebebasan yang berbeda. Widodo (2000) menyatakan bahwa derajat kebebasan merupakan derajat independensi atau jumlah koordinat yang diperlukan untuk menyatakan posisi suatu sistem pada setiap saat. Suatu struktur memiliki frekuensi natural sebanyak derajat kebebasan yang dimilikinya dan jika beban dinamik yang diterima struktur memiliki frekuensi yang mendekati frekuensi natural dari struktur maka akan terjadi resonansi yang akan mengakibatkan keruntuhan atau *collapse* pada struktur.

Menurut Lumantarna (1999) sistem massa yang berpindah dalam satu arah saja yaitu arah horizontal dinamakan sistem berderajat kebebasan tunggal (*single degree of freedom,* SDOF). Sedangkan jika sistem massa memiliki osilasi yang tersusun dari banyak gerak harmonik sebanyak derajat kebebasannya, maka dinamakan berderajat kebebasan banyak (*multiple degree of freedom*, MDOF). Pada sistem SDOF, struktur dimodelkan dengan massa tunggal dan koordinat perpindahan tunggal, sedangkan sistem MDOF dimodelkan dengan massa dan koordinat perpindahan tidak tunggal.

Craig (1981) telah memodelkan sistem SDOF dan MDOF secara visualisasi sebagai sebuah sistem massa. Selanjutnya, Robert (1997) menyatakan bahwa struktur bangunan satu lantai dan N-lantai, untuk $N > 1$, dapat disederhanakan dengan mengidealisasikan bangunan tersebut berturut-turut sebagai sistem dengan derajat kebebasan tunggal (SDOF) dan derajat kebebasan banyak (MDOF). Pada struktur bangunan lebih dari satu lantai, setiap lantai dari bangunan dapat memiliki massa dan daya elastisitas (kekakuan) berbeda ketika terjadi guncangan. Selain itu, gaya kinetik gempa bumi yang berlaku pada setiap lantai juga berbeda.

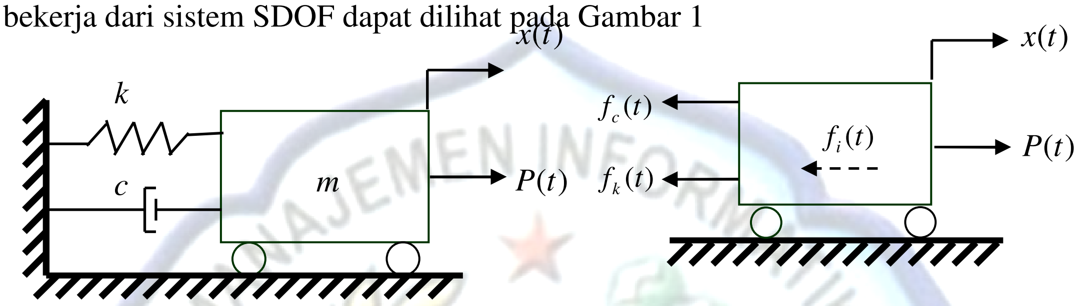
Pada paper ini diturunkan model matematis dari getaran bangunan satu lantai (sistem SDOF) dan N-lantai (sistem MDOF) sebagai gerak harmonik teredam terpaksa. Gaya pemaksa (gaya luar) yang menyebabkan struktur bangunan berosilasi adalah gaya kinetik yang dihasilkan dari pergerakan tanah akibat gempa bumi. Besarnya gaya yang berlaku pada struktur bangunan dipengaruhi oleh magnitude gempa, jarak episenter, lama gerakan tanah, kondisi tanah, dan besar frekwensi. Menurut Winardi (2006) pergerakan tanah pada saat terjadi gempa bumi dapat diketahui dengan menganalisis data yang dihasilkan seismometer. Pada saat struktur bangunan berosilasi, osilasi tersebut akan mengalami redaman yang berasal dari gesekan dengan udara, tanah, dan kekakuan struktur itu sendiri.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Model Getaran Bangunan 1 Lantai

Dalam menganalisa pergerakan bangunan satu lantai, pergerakan tersebut dapat disederhanakan dengan mengidealisasikan bangunan sebagai sistem dengan derajat kebebasan tunggal atau SDOF (*Single Degree of Freedom*). Sistem SDOF merupakan sistem massa yang mengalami perpindahan dalam satu arah saja, yaitu

arah horizontal. Sebagai ilustrasi, komponen dasar dan kesetimbangan gaya yang bekerja dari sistem SDOF dapat dilihat pada Gambar 1



(a) (b)

Gambar 1 Sistem SDOF: (a) komponen dasar; (b) kesetimbangan gaya.

Pada Gambar 1, m, c, dan k berturut-turut menyatakan massa sistem, konstanta redaman, dan konstanta pegas. Sedangkan $x(t)$, $\dot{x}(t)$, dan $\dot{x}(t)$ berturut-turut menyatakan perpindahan, kecepatan, dan perpindahan relatif massa sistem pada saat *t*. Selanjutnya, $f_i(t)$, $f_c(t)$, $f_k(t)$, dan $P(t)$ berturut-turut menyatakan gaya inersia, gaya redaman, gaya elastisitas, dan gaya eksternal yang bekerja pada sistem pada saat t.

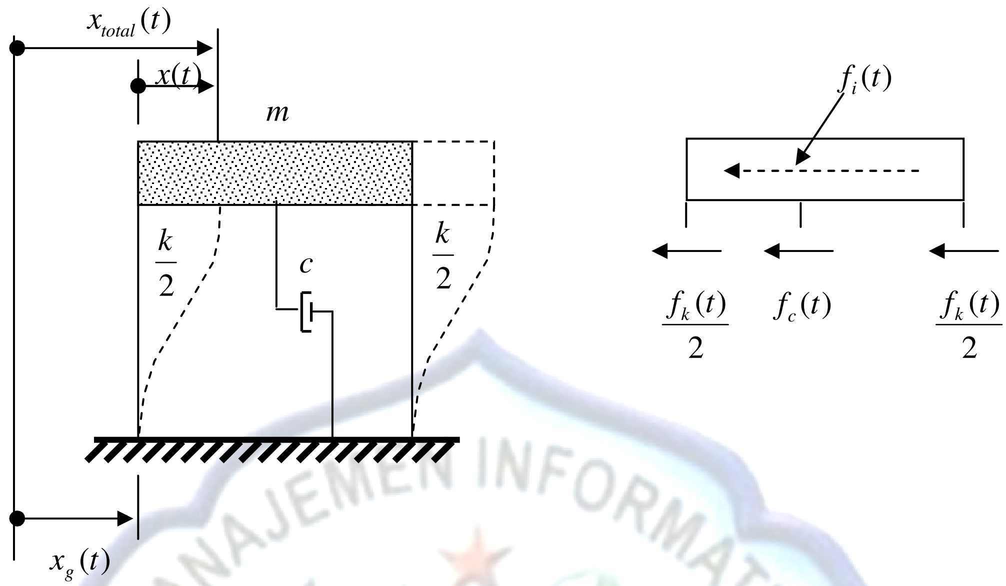
Berdasarkan kesetimbangan dinamis *free-body*, persamaan gerak Sistem SDOF (*Single Degree of Freedom*) yang dihasilkan oleh gaya luar $P(t)$ dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$f_i(t) + f_c(t) + f_k(t) = P(t)\,. \qquad (1)$$

Berdasarkan hukum Newton dan prinsip d'Alembert, diperoleh $f_i(t) = m\ddot{x}(t)$, $f_c(t) = c\dot{x}(t)$, dan $f_k(t) = kx(t)$, sehingga Persamaan (1) menjadi

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = P(t) \qquad (2)$$

Ilustrasi model getaran bangunan satu lantai dapat dilihat pada Gambar 2, dengan $x(t)$, $x_g(t)$, dan $x_{total}(t)$ berturut-turut menyatakan perpindahan relatif massa, perpindahan tanah, dan perpindahan total massa pada saat t.



Gambar 2 Pengaruh rangsangan gempa bumi terhadap sistem SDOF:
(a) pergerakan sistem; (b) kesetimbangan gaya.

Berdasarkan Gambar 2, gaya luar direpresentasikan sebagai $P(t) = -m\ddot{x}_g(t)$, sehingga diperoleh persamaan

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{x}_g(t) \tag{3}$$

Dalam bentuk alternatif, Persamaan (3) dapat ditulis

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\ddot{x}_g(t) \tag{4}$$

dengan $\beta = \dfrac{c}{2m\omega}$ adalah rasio redaman dan $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ adalah frekuensi sudut (rad/detik). Dalam analisis pengaruh gaya gempa bumi terhadap getaran bangunan, beberapa hal yang menarik untuk dikaji adalah perpindahan relatif, kecepatan relatif, dan percepatan total bangunan tersebut. Dari persamaan (4), percepatan total massa, $\ddot{x}_{total}(t)$, dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{total}(t) &= \ddot{x}_g(t) + \ddot{x}(t) \\ &= -\left(2\beta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Respons struktur merupakan riwayat waktu dari perpindahan, kecepatan, dan percepatan dari fungsi beban tertentu. Pada permasalahan beban dinamis seperti beban gempa, beban dan respons strukturnya merupakan fungsi dari waktu, sehingga analisis yang dilakukan harus berdasarkan waktu. Pembebanan pada struktur akibat beban dinamis dapat terjadi sewaktu-waktu, maka untuk perencanaan bangunan perlu diperhitungkan pengaruh beban tersebut. Adakalanya struktur yang direncanakan harus menerima beban secara berulang-ulang (periodik) yang tidak diperhitungkan sebelumnya. Selanjutnya, diberikan respons struktur terhadap dua fungsi periodik sebagai gaya eksternal, yaitu fungsi sinus (beban sinusoidal) dan deret Fourier.

Respons Struktur dengan *P(t)* Merupakan Fungsi Sinus

Diasumsikan percepatan tanah diberikan oleh persamaan

$$\ddot{x}_g(t) = A_m \sin \varpi t \,,$$

dengan A_m menyatakan puncak percepatan tanah atau amplitudo beban sinusoidal dan $\varpi = \dfrac{2\pi t}{T_g}$ adalah frekuensi sirkular (*circular frequency*), dengan T_g merupakan periode beban sinusoidal. Sehingga Persamaan (4) menjadi

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -A_m \sin \varpi t \,. \qquad (5)$$

Solusi dari Persamaan (5) adalah

$$x(t) = e^{-\beta\omega t}\left[A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right] - \frac{A_m}{\omega^2}\left[\frac{\left(1-r^2\right)\sin\varpi t - 2\beta r\cos\varpi t}{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\beta r\right)^2}\right], \qquad (6)$$

dengan $r = \dfrac{\varpi}{\omega}$. Dari Persamaan (6) diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = {} & e^{-\beta\omega t}\left[(B\omega_D - A\omega\beta)\cos\omega_D t + (B\omega\beta - A\omega_D)\sin\omega_D t\right] \\ & - \frac{A_m r}{\omega}\left[\frac{\left(1-r^2\right)\cos\varpi t + 2\beta r\sin\varpi t}{\left(r^2-1\right)^2 + \left(2\beta r\right)^2}\right] .\end{aligned} \qquad (7)$$

Konstanta *A* dan *B* ditentukan dengan mengevaluasi Persamaan (6) dan (7) untuk nilai awal $x_0 = 0$ dan $\dot{x}_0 = 0$, sehingga diperoleh

$$A = -\frac{A_m}{\omega^2}\frac{2\beta r}{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\beta r\right)^2} \qquad (8)$$

dan

$$B = \frac{1}{\omega_D}\left[A\omega\beta + \frac{A_m r}{\omega}\frac{1-r^2}{\left(2\beta r\right)^2 + \left(r^2-1\right)^2}\right]. \qquad (9)$$

Selanjutnya, percepatan relatif ditentukan dengan menurunkan kecepatan relatif

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) = {} & e^{-\beta\omega t}\left[\left(A\omega^2\beta^2 - 2B\omega_D\omega\beta - A\omega_D^2\right)\cos\omega_D t\right. \\ & \left. + \left(B\omega^2\beta^2 + 2A\omega_D\omega\beta - B\omega_D^2\right)\sin\omega_D t\right] \\ & + A_m r^2\left[\frac{\left(1-r^2\right)\sin\varpi t - 2\beta r\cos\varpi t}{\left(r^2-1\right)^2 + \left(2\beta r\right)^2}\right].\end{aligned} \qquad (10)$$

Respons Struktur dengan *P(t)* Merupakan Deret Fourier

Fourier menjelaskan bahwa sembarang fungsi periodik dapat dinyatakan sebagai penjumlahan tak terhingga dari suku-suku fungsi sinus dan cosinus, yang dikenal sebagai deret Fourier. Diasumsikan gaya eksternal diberikan oleh persamaan berikut:

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos \varpi t + a_2 \cos 2\varpi t + ... + a_n \cos n\varpi t$$
$$+ b_1 \sin \varpi t + b_2 \sin 2\varpi t + ... + b_n \sin n\varpi t \tag{11}$$

atau

$$P(t) = a_0 + \sum \left(a_n \cos n\varpi t + b_n \sin n\varpi t \right), \tag{12}$$

dengan $\varpi = 2\pi / T_g$ adalah frekuensi sirkular, dengan periode fungsi beban T_g. Koefisien a_0, a_n, dan b_n diberikan oleh

$$a_0 = \frac{1}{T_g} \int_{t_1}^{t_1+T_g} P(t) dt , \tag{13a}$$

$$a_n = \frac{2}{T_g} \int_{t_1}^{t_1+T_g} P(t) \cos n\varpi t dt , \tag{13b}$$

$$b_n = \frac{2}{T_g} \int_{t_1}^{t_1+T_g} P(t) \sin n\varpi t dt , \tag{13c}$$

dengan t_1 dapat menyatakan sembarang nilai waktu, tetapi biasanya sama dengan $-T_g/2$ atau nol. Konstanta a_0 menyatakan rata-rata fungsi periodik $P(t)$.

Dengan merepresentasikan gaya eksternal menjadi bagian-bagian fungsi linear, koefisien Fourier dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari integral masing-masing segmen dari gaya eksternal, yaitu:

$$a_0 = \frac{1}{T_g} \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(t) dt , \tag{14a}$$

$$a_n = \frac{2}{T_g} \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(t) \cos n\varpi t dt , \tag{14b}$$

$$b_n = \frac{2}{T_g} \sum_{i=1}^{N} \int_{t_{i-1}}^{t_i} P(t) \sin n\varpi t dt , \tag{14c}$$

dengan N adalah jumlah segmen atau bagian-bagian linear gaya eksternal. Gaya eksternal pada interval $t_{i-1} \le t \le t_i$ diberikan oleh persamaan

$$P(t) = P(t_{i-1}) + \frac{\Delta P_i}{\Delta t} (t - t_{i-1}) \tag{15}$$

dengan

$$\Delta P_i = P(t_i) - P(t_{i-1}) \tag{16}$$

Jika Persamaan (15) disubstitusikan ke dalam Persamaan (14a), (14b), dan (14c), maka diperoleh

$$a_0 = \frac{1}{T_g} \sum_{i=1}^{N} \left[\Delta t \frac{P(t_i) + P(t_{i-1})}{2} \right] \tag{17a}$$

$$a_n = \frac{2}{T_g} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{n\varpi} \left[P(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t} \right] \left(\sin n\varpi t_i - \sin n\varpi t_{i-1} \right) + \frac{\Delta P_i}{n^2 \varpi^2 \Delta t} \right. \tag{17b}$$

$$\left. \left[\left(\cos n\varpi t_i - \cos n\varpi t_{i-1} \right) + n\varpi \left(t_i \sin n\varpi t_i - t_{i-1} \sin n\varpi t_{i-1} \right) \right] \right\}$$

$$b_n = \frac{2}{T_g} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{n\varpi} \left[P(t_{i-1}) - t_{i-1} \frac{\Delta P_i}{\Delta t} \right] \left(\cos n\varpi t_i - \cos n\varpi t_{i-1} \right) + \frac{\Delta P_i}{n^2 \varpi^2 \Delta t} \right. \tag{17c}$$

$$\left. \left[\left(\sin n\varpi t_i - \sin n\varpi t_{i-1} \right) + n\varpi \left(t_i \cos n\varpi t_i - t_{i-1} \cos n\varpi t_{i-1} \right) \right] \right\}$$

Respons struktur bangunan satu lantai terhadap gaya eksternal periodik yang direpresentasikan dengan deret Fourier merupakan superposisi dari respons terhadap setiap komponen dari deret tersebut. Respons total dari sistem SDOF dirumuskan sebagai berikut:

$$x_i = \frac{a_0}{k} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n 2r_n\beta + b_n \left(1 - r_n^2\right)}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\beta\right)^2} \sin n\varpi t_i + \frac{a_n \left(1 - r_n^2\right) - b_n 2r_n\beta}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\beta\right)^2} \cos n\varpi t_i \right] \tag{18a}$$

$$\dot{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n 2r_n\beta + b_n \left(1 - r_n^2\right)}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\beta\right)^2} (n\varpi) \cos n\varpi t_i - \frac{a_n \left(1 - r_n^2\right) - b_n 2r_n\beta}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\beta\right)^2} (n\varpi) \sin n\varpi t_i \right] \tag{18b}$$

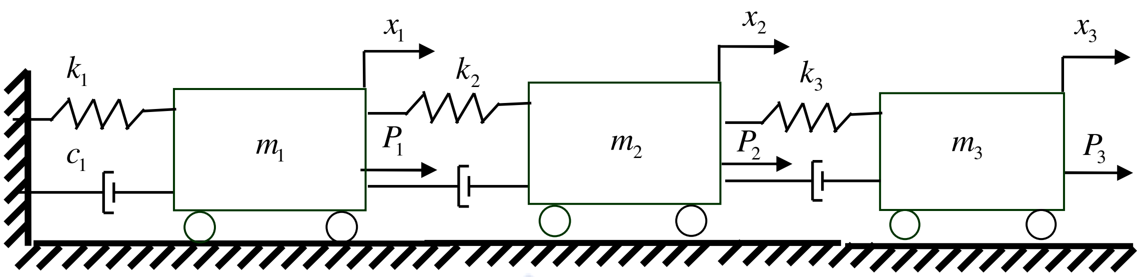
$$\ddot{x}_i = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{a_n 2r_n\beta + b_n \left(1 - r_n^2\right)}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\beta\right)^2} (n\varpi)^2 \sin n\varpi t_i - \frac{a_n \left(1 - r_n^2\right) - b_n 2r_n\beta}{\left(1 - r_n^2\right)^2 + \left(2r_n\beta\right)^2} (n\varpi)^2 \cos n\varpi t_i \right] \tag{18c}$$

dengan $r_n = \dfrac{n\varpi}{\omega}$.

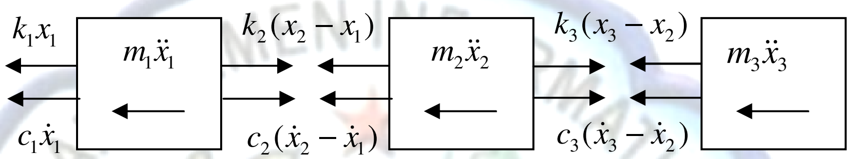
Model Getaran Bangunan *N*-Lantai

Dalam menganalisa pergerakan bangunan *N*-lantai atau gedung bertingkat, pergerakan tersebut dapat disederhanakan dengan mengidealisasikan bangunan sebagai sistem dengan derajat kebebasan banyak atau MDOF (*Multi Degree of Freedom*). Dalam hal ini, bangunan dimodelkan sebagai massa yang menggumpal pada titik-titik tertentu yang tidak berdimensi (*lumped-mass*) yaitu pada tiap-tiap lantai tingkat. Titik pemusatan massa pada suatu lantai tingkat disebut pusat massa dari lantai tingkat tersebut, yang diketahui letaknya pada lantai tingkat tersebut sebagai titik tangkap dari resultan seluruh beban gravitasi (beban mati dan beban hidup) yang bekerja pada lantai tersebut. Dengan demikian, untuk setiap tingkat hanya ada satu massa yang mewakili tingkat tersebut. Pada pusat massa inilah beban lateral gempa akan bekerja.

Sebagai ilustrasi, sistem 3-DOF dapat dilihat pada Gambar 3, Sedangkan model getaran dan respon bangunan tiga lantai (gedung bertingkat) akibat gempa bumi dapat dilihat pada Gambar 4.



(a)



(b)

Gambar 3 Sistem 3-DOF: (a) komponen dasar; (b) diagram kesetimbangan.

Untuk memperoleh persamaan diferensial getaran digunakan prinsip keseimbangan dinamik pada suatu massa yang ditinjau. Dengan memperhatikan diagram keseimbangan (*free body diagram*) pada Gambar 3, maka diperoleh persamaan diferensial simultan gerakan massa sebagai berikut:

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2(x_2 - x_1) = P_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_2(x_2 - x_1) - k_3(x_3 - x_2) = P_2$$
$$m_2\ddot{x}_2 + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3(x_3 - x_2) = P_3$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 &= P_1 \\ m_2\ddot{x}_2 + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 - c_3\dot{x}_3 + (k_2 + k_3)x_2 - k_3x_3 &= P_2 \\ m_3\ddot{x}_3 - c_3\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 - k_3x_2 + k_3x_3 &= P_3 \end{aligned} \tag{19}$$

Sistem (19) dapat ditulis dalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Dengan menggunakan induksi matematika, dapat ditunjukkan bahwa bangunan *N*-lantai atau gedung dengan *N* tingkat yang mendapat gaya gempa bumi mempunyai persamaan getaran dalam bentuk

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = P(t), \tag{21}$$

dengan: $[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix}$, $[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & \cdots & -c_n & c_n \end{bmatrix}$,

$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$, $\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$, $\ddot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{bmatrix}$,

dan $P(t) \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{bmatrix}$.

Gaya eksternal atau gangguan dari luar dalam hal ini adalah berupa gerakan tanah akibat gempa pada dasar struktur, seperti terlihat pada Gambar 4(b), dengan

$$\ddot{x}'_i = \ddot{x}_i + \ddot{x}_g \tag{21}$$

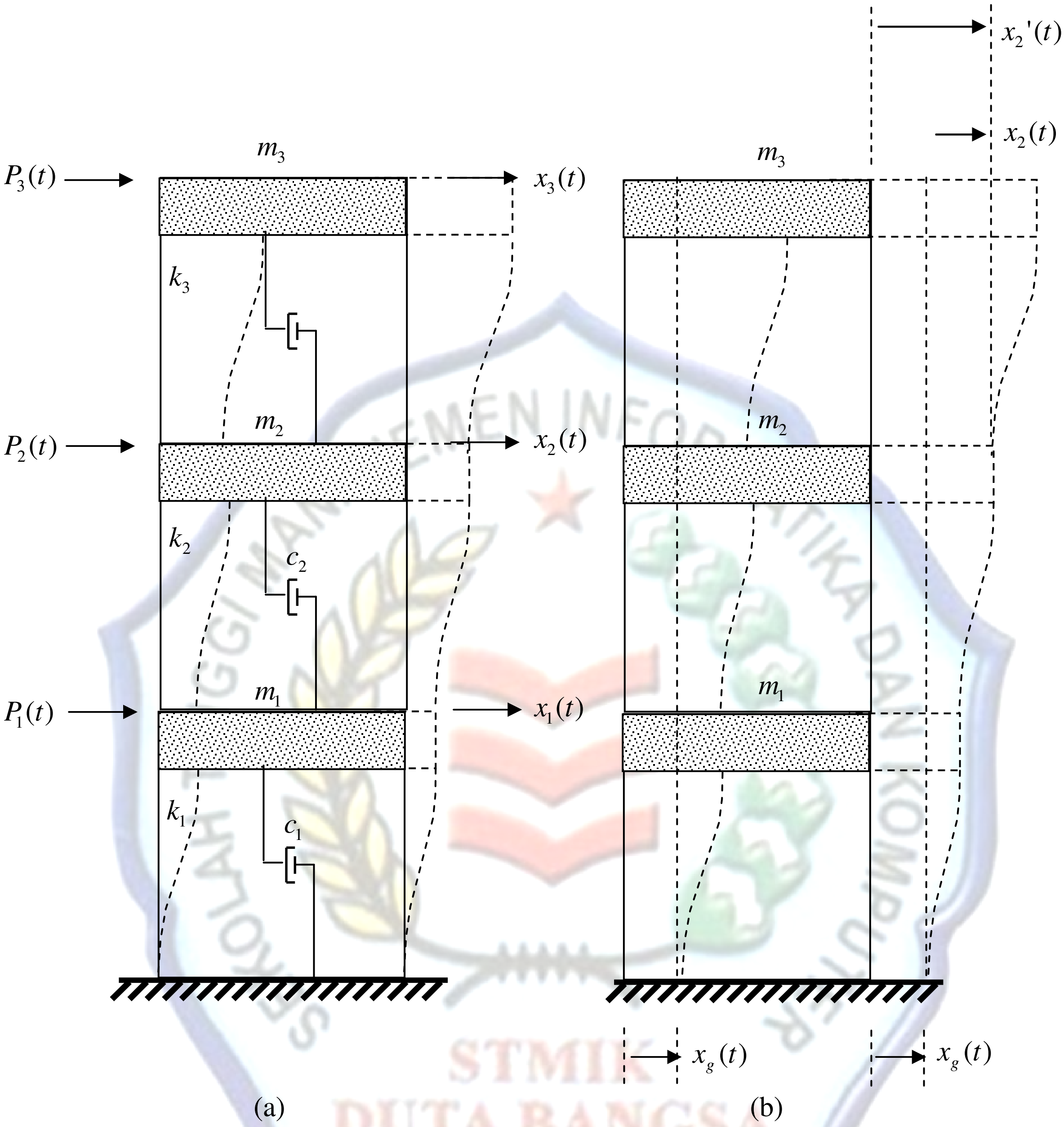
Persamaan getaran bangunan adalah

$$\begin{aligned} & [m]\ddot{x}' + [c]\dot{x} + [k]x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & [m](\ddot{x} + \ddot{x}_g) + [c]\dot{x} + [k]x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & [m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = -[m]\ddot{x}_g \end{aligned} \tag{22}$$

Jika $[m]$ adalah matriks diagonal, maka

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = -[m][1]\ddot{x}_g\,, \tag{23}$$

dengan $[1] = [1\ \ 1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1]^T$ dengan dimensi *N*.



Gambar 4 (a) Pergerakan sistem 3-DOF dan (b) Respon akibat beban gempa bumi

Jika $x(t) = [\Phi]\eta$, maka Persamaan (5.122) menjadi

$$[\Phi]^T[m][\Phi]\ddot{\eta} + [\Phi]^T[c][\Phi]\dot{\eta} + [\Phi]^T[k][\Phi]\eta = -[\Phi]^T[m][1]\ddot{x}_g \tag{24}$$

Sehingga diperoleh

$$m_j^*\ddot{\eta}_j + c_j^*\dot{\eta}_j + k_j^*\eta_j = P_j^* . \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow \ \ddot{\eta}_j + 2\beta_j\omega_j\dot{\eta}_j + \omega_j^2\eta_j = \Gamma_j\ddot{x}_g(t) \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow \ \ddot{D}_j + 2\beta_j \omega_j \dot{D}_j + \omega_j^2 D_j = \ddot{x}_g(t) \tag{27}$$

dengan $\Gamma_j = \dfrac{L_j}{m_j^*}$, yaitu faktor partisipasi ragam j, $L_j = \phi_j[m][1]$, yaitu faktor ragam eksitasi gempa, dan $D_j = \dfrac{\eta_j}{\Gamma_j}$. Solusi akhir dalam koordinat geometrik adalah

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j \phi_{ij} D_j,\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{28}$$

SIMULASI NUMERIK

Model struktur yang ditinjau mempunyai SDOF dengan massa, m = 12,775 kg.dt^2/cm, redaman $c = 2$, dan kekakuan, k = 4027,3 kg/cm. Simulasi sistem dilakukan dengan variasi massa dan variasi kekakuan untuk sistem teredam dengan pembebanan sinuoidal. Struktur dibebani dengan beban dinamik fungsi sinusiodal sebesar $P(t) = 1500 \sin(\pi t / 0.6)$ selama 1.5 detik.

Variasi I dilakukan dengan kekakuan tetap atau sama dengan kekakuan acuan, yaitu 4027,3 kg/cm, sedangkan massa bervariasi, yaitu 6,3875, 12,775, dan 25,550 kg.dt^2/cm.

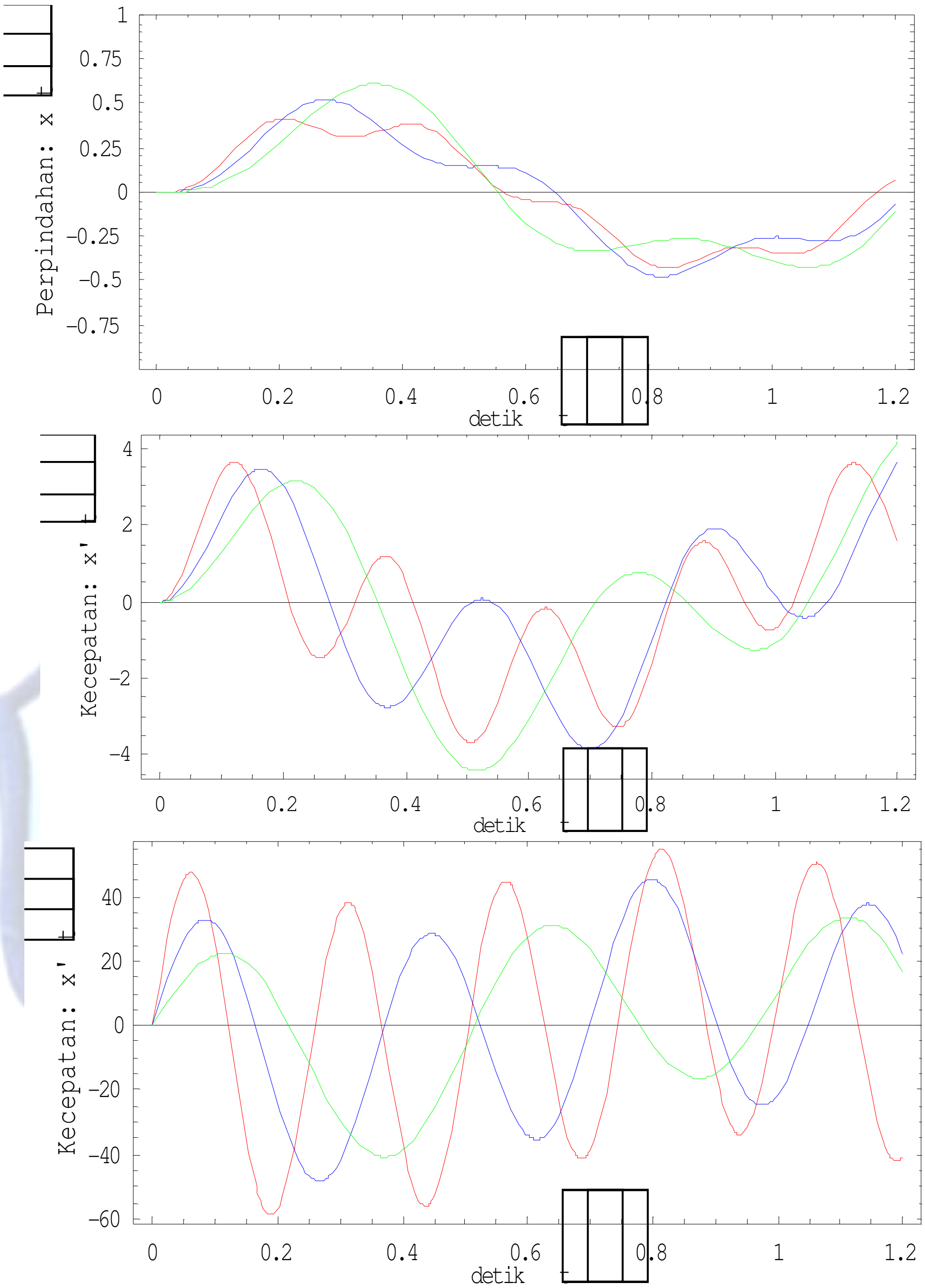
a. Untuk k = 4027,3 kg/cm dan m = 6,3875 kg.dt^2/cm diperoleh $\omega = 25.1097$ dan $\beta = 0.00623487$.
b. Untuk k = 4027,3 kg/cm dan m = 12,775 kg.dt^2/cm diperoleh $\omega = 17.7552$ dan $\beta = 0.00440872$.
c. Untuk k = 4027,3 kg/cm dan m = 25,550 kg.dt^2/cm diperoleh $\omega = 12.5549$ dan $\beta = 0.00311744$.

Gambar 5 menunjukkan bahwa semakin besar massa bangunan, maka semakin besar pula perpindahan maksimum yang dihasilkan. Dengan kata lain, massa berbanding lurus dengan perpindahan maksimum.

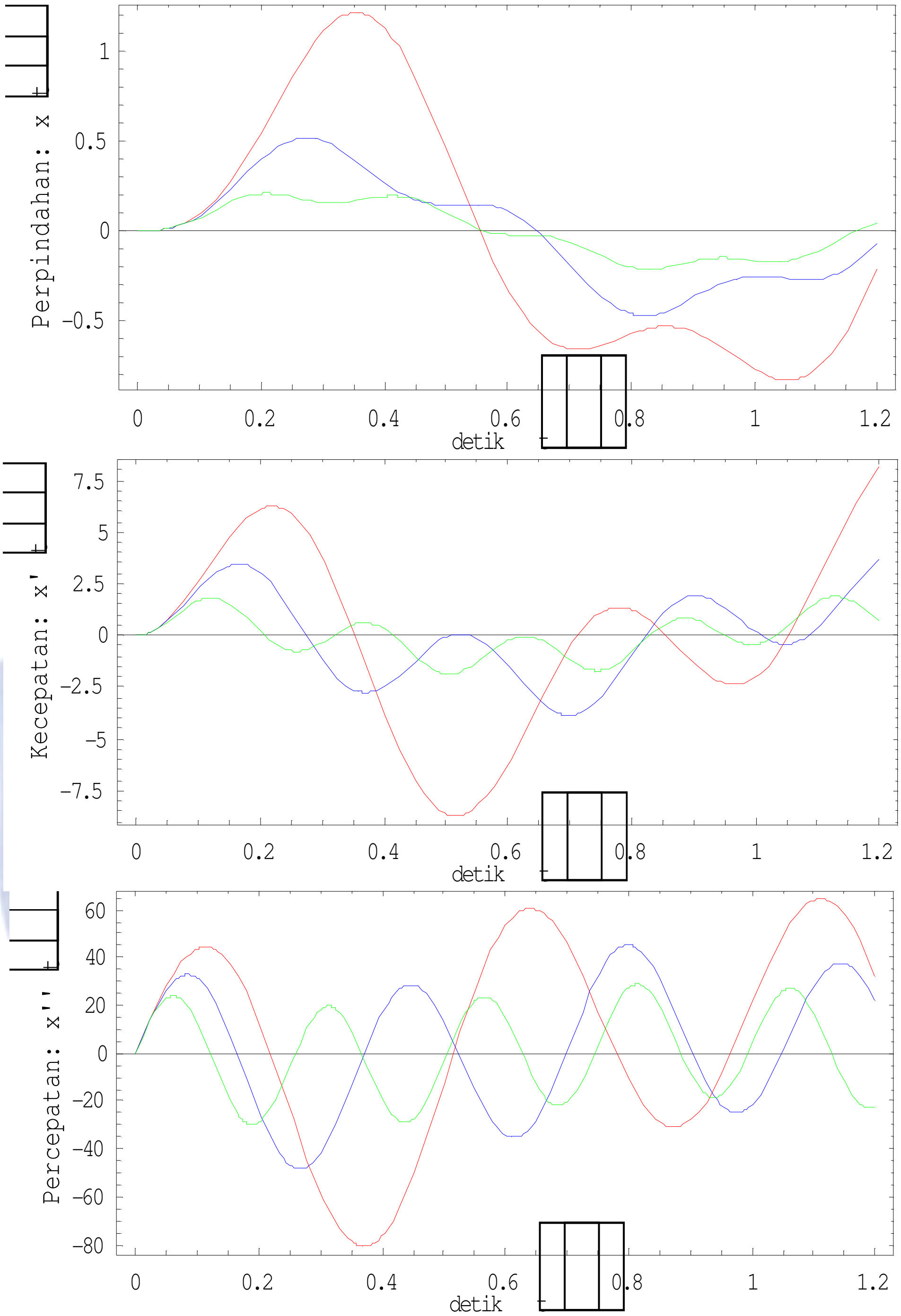
Variasi II dilakukan dengan massa tetap atau sama dengan massa acuan, yaitu 12,775 kg.dt^2/cm, sedangkan kekakuan bervariasi, yaitu 2013,64 kg/cm, 4027,3 kg/cm, dan 8054,54 kg/cm.

a. Untuk k = 2013,64 kg/cm dan m = 12,775 kg.dt^2/cm diperoleh $\omega = 12.5548$ dan $\beta = 0.00623489$.
b. Untuk k = 4027,3 kg/cm dan m = 12,775 kg.dt^2/cm diperoleh $\omega = 17.7552$ dan $\beta = 0.00440872$.
c. Untuk k = 8054,54 kg/cm dan m = 12,775 kg.dt^2/cm diperoleh $\omega = 25.1096$ dan $\beta = 0.00311745$.

Gambar 6 menunjukkan bahwa semakin besar kekakuan bangunan, maka semakin kecil perpindahan maksimum yang dihasilkan. Dengan kata lain, kekakuan berbanding terbalik dengan perpindahan maksimum.



Gambar 5 Perpindahan, kecepatan, dan percepatan massa untuk $m = 6{,}3875$ (merah), $m = 12{,}775$ (biru) dan $m = 25{,}550$ (hijau)



Gambar 6 Perpindahan, kecepatan, dan percepatan massa untuk $k = 2013{,}64$ (merah), $k = 4027{,}3$ (biru) dan $k = 8054{,}54$ (hijau)

KESIMPULAN

Model getaran bangunan satu lantai adalah

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\ddot{x}_g(t),$$
$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

sedangkan model getaran *N*-lantai adalah

$$[m]\ddot{x} + [c]\dot{x} + [k]x = -[m][1]\ddot{x}_g$$

Semakin besar massa bangunan, maka semakin besar pula perpindahan maksimum yang dihasilkan, sedangkan semakin besar kekakuan bangunan, maka semakin kecil perpindahan maksimum yang dihasilkan.

DAFTAR PUSTAKA

Craig, Roy R. 1981. *Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods*. Singapore: John Wiley and Sons, Inc.

Haberman, R. 1977. *Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Lumantarna, B. 1999. *Pengantar Analisis Dinamis dan Gempa*. Yogyakarta: Andi Offset.

Meyer, W.J. 1984. *Concept of Mathematical Modeling*. McGraw Hill Book Company.

Robert, Russel, and Samuel. 1997. *Accuracy of Response of Single Degree of Freedom Systems to Ground Motion.* Washington, DC: U.S. Army Corps of Engineers.

Sharov, A. 1996. *Equilibrium Stable or Unstable?* http://www.ento.vt.edu/ sharov/PopEcol/Lec9/equilib.html.

Widodo. 2000. *Respons Dinamik Struktur Elastik*. Yogyakarta: UII Press.

Winardi, A., dkk. 2006. *Gempa Jogja, Indonesia dan Dunia*. Jakarta: PT. Gramedia.