# Digraf Eksentrik dari Graf *Crown*

**NugrohoArif Sudibyo[1] , Tri Atmojo Kusmayadi[2]**
[1]Program Studi Teknik Informatika STMIK Duta Bangsa Surakarta
[2]Fakultas MIPA UNS Surakarta

**ABSTRAK**

*Diberikan G suatu graf dengan himpunan berhingga vertex V(G) dan himpunan edge E(G). Jarak dari vertex u ke vertex v di G, dinotasikan d(u,v), adalah panjang dari path terpendek dari vertex u ke v. Eksentrisitas vertex u dalam graf G adalah jarak maksimum dari vertex u ke sebarang vertex yang lain di G, dinotasikan e(u). Vertex v disebut vertex eksentrik dari u jika d(u,v)=e(u). Digraf eksentrik ED(G) dari suatu graf G adalah suatu graf yang mempunyai himpunan vertex yang sama dengan himpunan vertex G, dan terdapat suatu arc (edge berarah) yang menghubungkan vertex u ke v jika v adalah suatu vertex eksentrik dari u. Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik pada graf crown yang merupakan salah satu kelas graf*
**Kata kunci:** *eksentrik, digraf, graf crown.*

## A. PENDAHULUAN

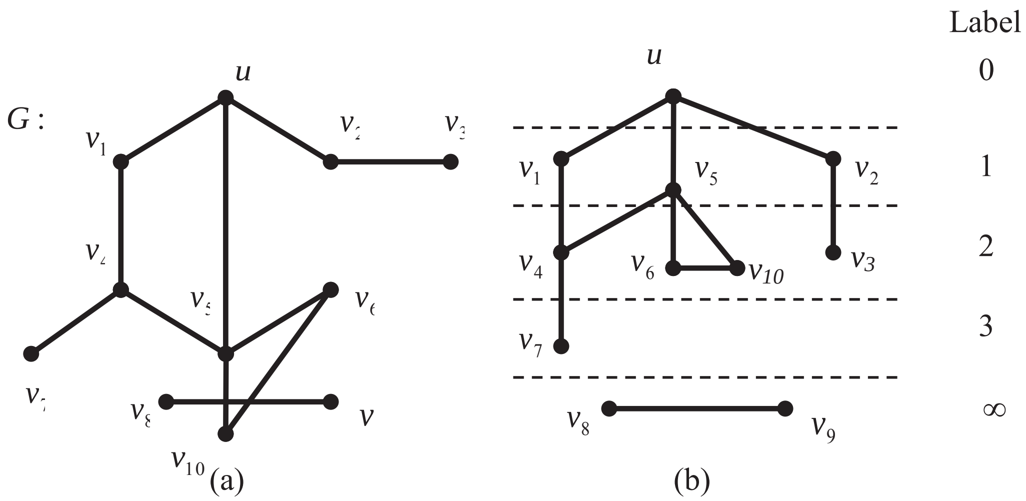
Digraf eksentrik digraf dari suatu graf telah banyak digunakan. Hal ini dapat dilihat dari penelitian yang menggunakan eksentrik digraf. Penelitian tersebut antara lain pada jaringan komunikasi komputer (Kamalesh dan Srivatsa, 2008) dan makro-ekonomi (Keller, 2007). Demikian juga perkembangannya dalam bidang matematika dapat dilihat pada barisan eksentrisitas dari graf terhubung (Ferrero dan Harary, 2009), barisan eksentrik dan siklis dalam graf (Harris dkk, 2000), karakterisasi dari eksentrik digraf (Gimbert dkk, 2006). Sedangkan pada beberapa klas graf telah ditemukan eksentrik digrafnya (Kusmayadi dkk, 2015). Dalam makalah ini dibahas eksentrik digraf dari suatu klas dalam graf yaitu graf *crown*.

Pengertian dan notasi yang berkaitan dalam makalah ini diambil dari Chartrand dan Lesniak (1996) serta Harris dkk (2000). Diketahui graf *G* dengan himpunan vertex *V(G)* dan himpunan edge *E(G)*. Jarak dua *vertex u* dan *v* dalam *G*, dinotasikan dengan $d(u,v)$, merupakan panjang *path* terpendek dari *vertex u* ke *vertex v*. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan kedua *vertex*, $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas dari *vertex u* dalam graf G didefinisikan sebagai jarak maksimum dari *vertex u* ke sembarang *vertex* lainnya dalam G. eksentrisitas *vertex u* dinotasikan sebagai $e(u)$ = $\max\{d(u,\text{v}) \mid v \in V(G)\}$. Sedangkan *vertex v* merupakan *vertex* eksentrik dari *vertex u* jika $d(u,v) = e(u)$. Digraf eksentik dari graf $G$ yaitu $ED(G)$ adalah graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan $G$, $V(ED(G)) = V(G)$ dan terdapat *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan setiap *vertex* dalam $G$ ke *vertex* eksentriknya. Suatu *arc* dalam digraf D dikatakan *arc* simetri jika *arc* tersebut menghubungkan *vertex u* dan *v*, demikian juga sebaliknya.

## ALGORITMA BREATH FIRST SEARCH

Dari definisi jarak, dapat dikatakan jika tidak ada lintasan yang menghubungkan *vertex u* dan *v*, maka $d(u,v) = \infty$. Selanjutnya, untuk menyelesaikan masalah lintasan terpendek dalam suatu graf $G$ digunakan algoritma BFS (*Breadth First Search*) *Moore*. Menurut Chartrand dan Oellermann (1993) langkah-langkah algoritma BFS *Moore* adalah sebagai berikut :

1. diambil salah satu *vertex*, misal *u*, dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak dari *u* ke dirinya sendiri, sedangkan semua *vertex* selain *u* dilabeli $\infty$,
2. semua *vertex* berlabel $\infty$ yang *adjacent* dengan *u* dilabeli 1,
3. semua *vertex* berlabel $\infty$ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1 dilabeli 2 dan demikian seterusnya sampai *vertex* yang dimaksud, misal *v*, sudah berlabel hingga. Dalam hal ini, label dari setiap *vertex* menyatakan jarak dari *vertex* u.




Gambar 1. Graf untuk Mengilustrasikan Jarak

Sebagai ilustrasi, diberikan graf $G$ pada Gambar 1(a) ditentukan jaraknya dari *vertex u* ke setiap *vertex* di $G$ dengan algoritma BFS *Moore* sebagai berikut.

1. *Vertex u* dilabeli 0 dan semua *vertex* selain $u$ dilabeli $\infty$.
2. Semua *vertex* berlabel $\infty$ yang *adjacent* dengan $u$, yaitu $v_1$, $v_2$, dan $v_5$, dilabeli 1.
3. Semua *vertex* berlabel $\infty$ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1, yaitu $v_3$, $v_1$, $v_6$, $v_{10}$, dilabeli 2.
4. Semua *vertex* berlabel $\infty$ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 2, yaitu $v_7$, dilabeli 3. Dengan demikian, diperoleh label tiap-tiap *vertex* yaitu pada Gambar 1(b).

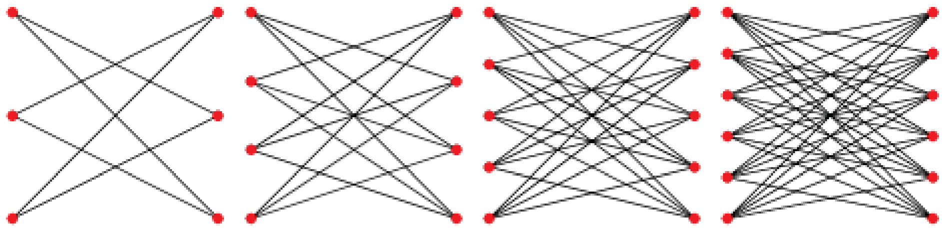
## B. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian yang didasarkan pada studi pustaka yang bersifat teoritis. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut.

1. Menelusuri pustaka yang berupa buku-buku referensi, jurnal, artikel dan mengkaji konsep-konsep dasar yang berkaitan dengan graf, *extermal problem* dan khususnya digraph eksentrik.
2. Mempelajari dan mengkaji beberapa hasil penelitian tentang digraph eksentrik pada suatu graf yang sudah diperoleh.
3. Mempelajari dan mengkaji kelas graf *crown*.
4. Mencari digraf eksentrik dari graf *crown* dengan tahapan sebagai berikut.
   (a) menentukan jarak, $d(u,v)$, dari *vertex u* ke setiap *vertex* lainnya dalam graf *crown* dengan algoritma BFS *Moore*. Selanjutnya, ditentukan eksentrisitas *vertex u*, $e(u)$, dengan memilih maksimal jarak dari *vertex u* tersebut,
   (b) menentukan *vertex* eksentrik $v$ dari $u$ dalam graf *crown* jika $d(u,v) = e(u)$,
   (c) menghubungkan *vertex u* dengan *vertex* eksentriknya dalam graf *crown* dengan *arc,* sehingga diperoleh digraf eksentrik dari masing-masing graf tersebut.

## C. HASIL DAN DISKUSI

Graf crown $S_n^0$ untuk $n \geq 3$ didefinisikan sebagai suatu graf dengan himpunan *vertex* $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ dan himpunan *edge* $\{(x_i, y_j) : 0 \leq i, j \leq n-1, i \neq j\}$ (Brouwer, 1989). Atau graf crown $S_n^0$ adalah graf bipartite lengkap $K_{n,n}$, dengan *edge* yang horisontal dihilangkan. Gambar graf *crown* disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Graf *crown* $S_3^0$, $S_4^0$, $S_5^0$ dan $S_6^0$

**Lema 1.** *Misalkan* $S_n^0$ *suatu graf crown dengan* $n \geq 3$, *maka eksentrisitas vertex* $x_i$ *adalah* $e(x_i) = 3$, *untuk* $i = 0,1,\ldots,n-1$ *dan eksentrisitas vertex* $y_i$ *adalah* $e(y_i) = 3$, *untuk* $i = 0,1,\ldots,n-1$.

**Bukti.** Dengan menggunakan Algoritma BFS Moore dapat diketahui jarak terjauh dari *vertex* $x_i$ ke *vertex* $y_i$ adalah 3, jadi eksentrisitas *vertex* $x_i$ adalah 3. Selain itu, jarak terjauh dari *vertex* $y_i$ ke *vertex* $x_i$ adalah 3 jadi eksentrisitas *vertex* $y_i$ adalah 3.

**Lemma 2.** *Misalkan* $S_n^0$ *suatu graf crown dengan* $n \geq 3$, *maka vertex eksentrik dari vertex* $x_i$ *adalah* $y_i$, *untuk* $i = 0,1,\ldots,n-1$ *dan vertex eksentrik dari vertex* $y_i$ *adalah* $x_i$, *untuk* $i = 0,1,\ldots,n-1$.

**Bukti.** *Vertex* eksentrik dapat dicari dengan melihat eksentrisitas yang diperoleh dari semua *vertex*. Dari Lema 1, eksentrisitas *vertex* $x_i$ adalah 3, maka *vertex* eksentriknya adalah $y_i$. Selanjutnya eksentrisitas *vertex* $y_i$ adalah 3, maka *vertex* eksentriknya adalah $x_i$.

**Lema 3.** *Misalkan* $S_n^0$ *suatu graf crown dengan* $n \geq 3$, *maka digraph eksentriknya adalah digraph dengan himpunan vertex*

$$V(ED(S_n^0)) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$$

*dan himpunan arc*

$$A(ED(S_n^0)) = \{\overleftrightarrow{x_i y_i} \,/\, i = 0,1,\ldots,n-1\}.$$

**Bukti.** *Arc* dapat diperoleh dengan menggabungkan setiap vertex dengan vertex eksentriknya dari graf *crown* $S_n^0$. Dari Lema 2, eksentrisitas *vertex* $x_i$ adalah $y_i$ dan eksentrisitas *vertex* $y_i$ adalah $x_i$, jadi $x_i$ *adjacent* ke $y_i$ dan $y_i$ *adjacent* ke $x_i$, sehingga membentuk *arc* $\overleftrightarrow{x_i y_i}$, $i = 0,1,\ldots,n-1$.

**Teorema 4.** *Misalkan* $S_n^0$ *suatu graf crown dengan* $n \geq 3$, *maka digraph eksentrik* $S_n^0$ *adalah digraf* $nK_2$ *atau disebut juga ladder rung dengan karakteristik himpunan vertex*

$$V(ED(S_n^0)) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\}$$

*dan himpunan arc*

$$A(ED(S_n^0)) = \{\overleftrightarrow{x_i y_i} \,/\, i = 0,1,\ldots,n-1\}.$$

**Bukti.** Dari Lema 3, eksentrisitas *vertex* $x_i$ adalah $y_i$ dan eksentrisitas *vertex* $y_i$ adalah $x_i$, jadi $x_i$ *adjacent* ke $y_i$ dan $y_i$ *adjacent* ke $x_i$, sehingga membentuk *arc* $\overleftrightarrow{x_i y_i}$, yang simetris. Berdasarkan himpunan *arc*, maka himpunan *vertex* $V(ED(S_n^0))$ dapat dibentuk suatu digraf yang lain. Dengan observasi diperoleh bahwa $ED(S_2^0)$ adalah $2K_2$, $ED(S_3^0)$ adalah $3K_2$, $ED(S_4^0)$ adalah $4K_2$, sehingga jelas bahwa $ED(S_n^0)$ adalah $nK_2$ dengan himpunan *vertex* dan *edge* seperti dikatakan dalam Lema 3.

## D. KESIMPULAN

Digraf eksentrik dari graf *crown* adalah digraf $nK_2$ atau disebut juga graf *ladder rung*.

## DAFTAR PUSTAKA


Brouwer, A. E.; Cohen, A. M.; and Neumaier, *A. Distance-Regular Graphs*. New York: Springer-Verlag, 1989.

Cartrand, G. and L. Lesniak, 1996, *Graphs and Digraphs* 3rd ed., Chapman and Hall/RCR, New York.

Chartrand, G. and O. R. Oellermann, 1993, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California.

Ferrero, D. and F. Harary, 2009, *On eccentricity sequences of connected graphs*, AKCE J. Graphs. Combin., 6, No. 3 : 401-408.

Gimbert, J., N. lopez, M. Miller and J. Ryan, 2006, *Characterization of Eccentric Digraphs*, Discrete Mathematics, 306:210-219..

Harris, J. M., J. L. Hirst and M. J. Mossinghoff, 2000, *Combinatorics and Graph Theory* 2nd ed.. Springer, New York.

Haviar, A., P. Hrnciar and G. Monoszava, 2004, *Eccentric Sequence and Cycles in Graphs*, Acta Univ. M. Belii Math, no 11:7-25.

Kamalesh V.N. and S. K. Srivatsa, 2008, On the Assignment of Node Number in a Computer Communication Network, *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2008*, San Francisco, USA :1-4.

Keller, A. A, 2007, Lexicographic All Circuits Enumeration in Large Scale Macro-econometric Models, *Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science 2007*, San Francisco, USA :1-6.

Tri Atmojo Kusmayadi, Yemi Kuswardi, Budi Usodo and Nugroho Arif Sudibyo, *The Eccentric Digraph of Corona of Cycle With Any Graph H*, Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), Volume 97, Issue 4, Pages 407 - 416