ESTIMASI PARAMETER MODEL *INTEGER-VALUE AUTOREGRESSIVE* UNTUK MENENTUKAN PROBABILITAS TERJADINYA KEBAKARAN YANG DISEBABKAN OLEH GAS ELPIJI DI KOTA SURAKARTA

Nurmalitasari

Jurusan Sistem Informasi, STMIK Duta Bangsa
Email: nurmal_ita@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan melakukan estimasi parameter model INteger-value AutoRregressive (INAR) untuk menentukan probabilitas terjadinya kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji di kota Surakarta. Dalam model INAR parameter yang diestimasi adalah probabilitas bertahan dalam suatu proses (α) dan parameter komponen kedatangan (λ). Pada penelitian ini parameter diestimasi menggunakan metode Bayes dengan prior sekawan. Nilai estimasi parameter diperoleh menggunakan metode Markov Chain Monte Carlo (MCMC) dengan pendekatan algoritma Adaptive Rejection Sampling (ARS). Berdasarkan penelitian ini diperoleh nilai $\hat{\alpha}$=0.35497 dan $\hat{\lambda}$=0.21789. Besar probabilitas terjadinya kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji di kota Surakarta sebesar 0.64503.

Kata Kunci: *model INAR, metode Bayes, ARS.*

PENDAHULUAN

Tabung gas elpiji merupakan salah satu penyebab terjadinya kebakaran yang sering terjadi di kota Surakarta selain kebakaran yang disebabkan karena hubungan pendek arus listrik. Kerugian akibat kebakaran ini tentu saja tidak sedikit, mulai dari jutaan sampai milyaran rupiah pada kasus kebakaran besar. Terkadang sebabnya bisa karena hal sepele atau memang karena tabung gas yang bocor [8].

Salah satu upaya untuk menekan kerugian akibat kebakaran yang disebabkan meledaknya tabung gas elpiji adalah mengetahui besar probabilitas terjadinya kebakaran yang disebabkan meledaknya tabung gas elpiji di kota Surakarta. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan probabilitas terjadinya kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji di kota Surakarta. Dengan adanya informasi besar probabilitas terjadinya kebakaran, pemerintah kota bisa lebih meningkatkan sosialisasi tentang penggunaan gas elpiji, serta masyarakat bisa lebih hati-hati dalam menggunakan gas elpiji. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data banyaknya kebakaran yang terjadi diwilayah Surakarta dalam setiap bulan. Karena data tersebut merupakan jenis *count data*, maka dalam penelitian ini pemodelan jumlah kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji akan menggunakan model untuk *count data* yaitu model *INAR.*

Menurut Silva *et al.* [7] dalam model *INAR* terdapat parameter yang belum diketahui dan perlu diestimasi yaitu probabilitas bertahan dalam suatu proses (α) dan parameter kedatangan (λ). Jika diaplikasikan pada pemodelan jumlah kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji, parameter yang diestimasi tersebut adalah pada bulan sebelum kejadian kebakaran terjadi, kejadian tersebut memiliki probabilitas tidak terjadi kebakaran sebesar α, dan rata-rata banyaknya kejadian kebakaran sebesar λ. Dalam penelitian ini ingin menghitung besar probabilitas terjadinya kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji di kota Surakarta yang diperoleh dari estimasi parameter tersebut.

Metode estimasi parameter yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode Bayes. Dalam estimasi parameter dengan menggunakan metode Bayes terdapat dua komponen yaitu distribusi prior dan distribusi posterior. Menurut Gilks dan Wild [6], nilai estimasi parameter diperoleh dengan simulasi pengambilan sampel parameter dari distribusi posterior kompleks menggunakan metode *Markov Chain Monte Carlo (MCMC)*. *Gibbs sampling* merupakan algoritma yang terdapat dalam metode *MCMC* yang digunakan untuk pengambilan sampel dari distribusi kompleks berdimensi tinggi. Dalam aplikasi *Gibbs sampling* pada umumnya distribusi bersyarat dari tiap-tiap variabel mempunyai bentuk *non-familiar* dan mempunyai bentuk aljabar yang rumit. Sehingga dibutuhkan komputasi yang rumit untuk mengevaluasi distribusi bersyarat tersebut. Alternatif dalam aplikasi *Gibbs sampling* tersebut adalah melakukan pengambilan sampel dengan algoritma *Adaptive Rejection Sampling (ARS).*

TINJAUAN PUSTAKA

Model *INAR*

Variabel random diskrit yang bernilai bilangan bulat positif, dan berdistribusi Poisson, X_t, dikatakan model *INAR*(1) jika memenuhi persamaan

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t$$

dengan $\alpha \circ X_{t-1}$ merupakan *binomial thinning operation* dan $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan variabel independen yang berdistribusi Poisson dengan parameter λ.

Fungsi densitas dari distribusi bersyarat X_t yang diberikan oleh X_{t-1}, dinotasikan $p(X_t|X_{t-1})$, adalah hasil konvolusi dari distribusi binomial hasil *binomial thinning operation* dan distribusi Poisson yang merupakan distribusi dari ε_t.

$$p(X_t|X_{t-1}) = \exp(-\lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{X_t - i}}{(X_t - i)!} \binom{X_{t-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{(X_{t-1})-i} \qquad (2.1)$$

Estimasi Parameter

Metode Bayesian merupakan salah satu metode estimasi dan inferensi dalam statistika yang berbasis pada aturan Bayes yaitu dengan menggabungkan informasi dari data observasi baru dan informasi yang telah diperoleh sebelumnya. Pada estimasi parameter Model *INAR* dengan menggunakan metode Bayes terdapat dua komponen yang harus diketahui yaitu distribusi prior dan distribusi posterior.

Distribusi prior parameter model *INAR*

Menurut Berger distribusi posterior lebih mudah diprediksi dengan distribusi prior sekawan. Menurut Fink, prior sekawan untuk distribusi binomial adalah distribusi beta. Sehingga dapat ditentukan asumsi probabilitas α berdistribusi beta dengan parameter a dan b, dan dinotasikan $\alpha \sim Beta(a,b)$. Prior sekawan untuk distribusi Poisson adalah distribusi gamma. Dalam penelitian ini parameter komponen kedatangan (λ) diasumsikan berdistribusi gamma dengan parameter c dan d, dan dinotasikan $\lambda \sim GAM(c,d)$. Distribusi prior parameter model *INAR* adalah

$$p(\alpha, \lambda) \propto \alpha^{1-a}(1-\alpha)^{1-b}\, \lambda^{c-1} \exp(-d\lambda). \qquad (2.2)$$

dengan a, b, c, dan d adalah parameter yang tidak diketahui[7].

Distribusi posterior parameter model *INAR*

Distribusi posterior parameter model diperoleh dengan mengalikan distribusi prior dengan fungsi *likelihood*. Fungsi *likelihood* model *INAR* adalah sebagai berikut.

$$L(X,\alpha,\lambda|X_1) = \prod_{t=2}^{n} p(X_t|X_{t-1})$$
$$\exp(-(n-1)\lambda) \prod_{t=2}^{n} \sum_{i=0}^{M_t} \frac{\lambda^{X_t - i}}{(X_t - i)!} \binom{X_{t-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{(X_{t-1})-i}. \qquad (2.3)$$

Distribusi posterior parameter model *INAR* adalah sebagai berikut.

$$p(\alpha,\lambda|X) \propto L(X,\alpha,\lambda|X_1)\, p(\alpha,\lambda)$$
$$= \exp(-(d+n-1)\lambda)\, \alpha^{1-a} (1-\alpha)^{1-b}\, \lambda^{c-1}$$
$$\prod_{t=2}^{n} \sum_{i=0}^{M_t} (\lambda^{X_t - i}/(X_t - i)!) \binom{X_{t-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{(X_{t-1})-i}. \qquad (2.4)$$

Distribusi posterior bersyarat penuh dari λ adalah sebagai berikut.

$$p(\lambda|\alpha,X) \propto exp(-(d+n-1)\lambda)\, \lambda^{c-1}$$
$$\prod_{t=2}^{n} \sum_{i=0}^{M_t} \frac{\lambda^{X_t - i}}{(X_t - i)!} \binom{X_{t-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{(X_{t-1})-i}. \qquad (2.5)$$

Distribusi bersyarat penuh dari λ merupakan kombinasi linier dari fungsi densitas gamma. Sedangkan distribusi posterior bersyarat penuh dari α adalah sebagai berikut.

$$p(\alpha|\lambda,X) \propto \alpha^{1-a} (1-\alpha)^{1-b}$$
$$\prod_{t=2}^{n} \sum_{i=0}^{M_t} \frac{\lambda^{X_t - i}}{(X_t - i)!} \binom{X_{t-1}}{i} \alpha^i (1-\alpha)^{(X_{t-1})-i}\ . \qquad (2.6)$$

Distribusi bersyarat penuh dari α tersebut merupakan kombinasi linier dari fungsi densitas beta. [6]

Estimator Bayes untuk parameter model *INAR*

Informasi pada distribusi posterior bersyarat penuh dari masing-masing parameter dapat digunakan untuk menentukan estimator untuk parameter. Jika $\theta = \{\alpha,\lambda\}$ merupakan himpunan nilai parameter model *INAR* yang belum diketahui, maka $\hat{\theta} = \{\hat{\alpha},\hat{\lambda}\}$ adalah estimator untuk $\theta = \{\alpha,\lambda\}$. Misalkan $\mathrm{I}(\theta)$ merupakan fungsi dari parameter $\theta = \{\alpha,\lambda\}$, jika diambil $\theta = \mathrm{I}(\theta)$ maka $\hat{\theta}$ merupakan estimator dari $\mathrm{I}(\theta)$. Estimator Bayes merupakan estimator yang meminimumkan fungsi resiko $R_{\hat{\theta}}(\theta)$, dengan $R_{\hat{\theta}}(\theta)$ merupakan harga harapan dari fungsi kerugian, $L(\hat{\theta}|\theta)$. Estimasi Bayes dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\hat{\alpha} = E_{\alpha|\lambda,X}[\mathrm{I}(\alpha)] = \int_0^1 \mathrm{I}(\alpha)\ f(\alpha|\lambda,X)d\alpha = \int_0^1 \alpha\ f(\alpha|\lambda,X)d\alpha \qquad (2.7)$$
$$\hat{\lambda}\ = E_{\lambda|\alpha,X}[\mathrm{I}(\lambda)] = \int_0^\infty \mathrm{I}(\lambda)\ f(\lambda|\alpha,X)d\lambda = \int_0^\infty \lambda\ f(\lambda|\alpha,X)d\lambda \qquad (2.8)$$

Perhitungan integrasi pada persamaan (2.7) dan (2.8) menggunakan konsep integrasi Monte Carlo. Konsep integrasi Monte Carlo adalah dengan membangkitkan sampel random dari distribusi $f(\alpha|\lambda,X)$ dan $f(\lambda|\alpha,X)$ kemudian menghitung rata-rata dari sampel yang telah dibangkitkan dari masing-masing fungsi tersebut. Perhitungan untuk harga harapan estimator parameter model dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\hat{\alpha} = \int_0^1 \alpha\ f(\alpha|\lambda,X)d\alpha \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \qquad (2.9)$$
$$\hat{\lambda} = \int_0^\infty \lambda\ f(\lambda|\alpha,X)d\lambda\ \approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \qquad (2.10)$$

Penyampelan dari distribusi probabilitas $f(\alpha|\lambda,X)$ dan $f(\lambda|\alpha,X)$ dapat dilakukan dengan proses Markov. Proses Markov dilakukan dengan membuat rantai Markov dengan distribusi stasionernya mendekati distribusi probabilitas $f(\alpha|\lambda, X)$ dan $f(\lambda|\alpha, X)$. Menurut Gilks dan Wild, nilai estimasi parameter diperoleh dengan simulasi pengambilan sampel parameter dari distribusi posterior kompleks menggunakan metode *MCMC*, khususnya dengan algoritma *Gibbs sampling*. Konsep utama dalam *MCMC* adalah membuat sampel pendekatan dari distribusi posterior parameter, dengan membangkitkan sebuah rantai Markov yang memiliki distribusi limit mendekati distribusi posterior parameter. Dalam aplikasi *Gibbs sampling* apabila distribusi bersyarat dari tiap-tiap variabel mempunyai bentuk *non-familiar* dan mempunyai bentuk aljabar yang rumit maka pengambilan sampel menggunakan algoritma *Adaptive Rejection Sampling (ARS)*.

Syarat penggunaan algoritma *ARS* yaitu fungsi densitas bersyarat penuh dari masing-masing parameter adalah log-konkav. Menurut Bagnoli distribusi posterior bersyarat penuh untuk α dan λ adalah log-konkav, jika memenuhi:

a. $p'(\alpha|\lambda, X)/p(\alpha|\lambda, X)$adalah monoton turun pada (0, 1).
b. $p'(\lambda|\alpha, X)/p(\lambda|\alpha, X)$ adalah monoton turun pada (0, ∞).
c. $(\log p(\lambda|\alpha, X))'' < 0$ dan $\log p(\alpha|\lambda, X)'' < 0$.

Gilks dan Wild [6] menjelaskan Algoritma *ARS* adalah sebagai berikut.

1) Mendefinisikan $h(\theta)=\ln f(\theta)$ dan $h(\theta)$ konkav di setiap D dan mengevaluasi $h(\theta)$dan $h'(\theta)$ pada$\theta_1 \leq \theta_2 \leq \ldots \leq \theta_k \in D$.
2) Menginisialisasikan absis dalam T_k , dengan $T_k=\{\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k\}$, kemudian mendefinisikan fungsi *envelope*, $u_k(\theta)$, yang merupakan batas atas dari garis singgung $h(\theta)$ dan mendefinisikan fungsi *squeezing*, $l_k(\theta)$, yang merupakan batas bawah dari garis singgung $h(\theta)$.
3) Mengambil sampel θ^* dari $s_k(\theta)$, dengan
$$s_k(\theta) = \frac{\exp u_k(\theta)}{\int_D \exp u_k(\theta) d\theta},$$
dan mengambil sampel w dari distribusi uniform (0,1). Jika $u \leq \exp\{l_k(\theta^*) - u_k(\theta^*)\}$, maka θ^* diterima, jika tidak maka mengevaluasi $h(\theta^*)$ dan $h'(\theta^*)$. Jika $u \leq \exp\{h(\theta^*) - uk\theta*\}$, maka $\theta*$ diterima, jika tidak maka $\theta*$ ditolak.
Langkah-langkah tersebut diulang sampai n iterasi hingga diperoleh rata-rata θ^* yang konvergen.

Metode Penelitian

Sumber data pada penelitian ini adalah data sekunder yaitu diperoleh dari Badan Pusat Statistik kota Surakarta. Data tersebut adalah data jumlah kebakaran yang disebabkan karena tabung gas elpiji tiap bulan dari September 2009 sampai dengan Desember 2012.

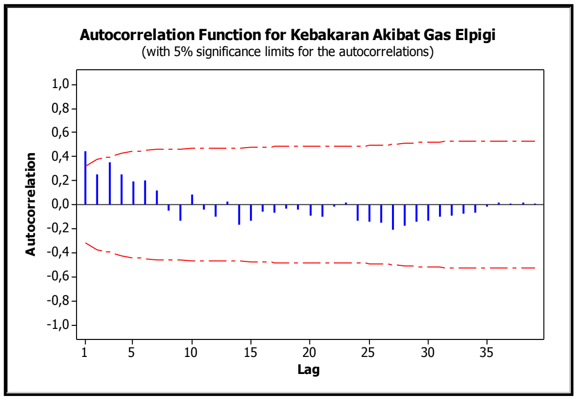
Langkah-langkah yang dilakukan dalam analisis adalah:

a. Merancang model *INAR* untuk data jumlah kejadian kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji dengan menggunakan bantuan *Software Minitab 16*.
b. Menentukan distribusi prior parameter model hasil langkah *a*.
c. Membentuk fungsi *likelihood* untuk estimasi parameter.
d. Membentuk distribusi posterior parameter dengan mengalikan hasil langkah *a* dan *b*.
e. Membentuk distribusi posterior parameter α dari hasil langkah *d*.
f. Membentuk distribusi posterior parameter λ dari hasil langkah *d*.
g. Membentuk algoritma *Gibbs sampling* dengan menggunakan hasil langkah *e* dan *f*.
h. Membentuk algoritma *ARS* dari hasil langkah *g*.
i. Menentukan nilai estimasi parameter dari hasil langkah *h*.

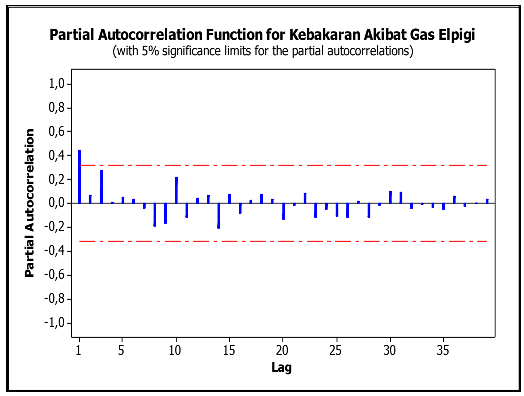
j. Menentukan besar probabilitas terjadinya kebakaran berdasarkan hasil langkah *i*.

Hasil dan Pembahasan

Identifikasi model awal data banyaknya kebakaran yang disebabkan gas elpiji adalah model *INAR*(1). Hal tersebut dapat dilihat dari plot ACF dapat digambarkan pada Gambar 4.1. dan PACF dapat digambarkan pada Gambar 4.2.



Gambar 4.1. Plot ACF data jumlah kebakaran akibat gas elpiji.



Gambar 4.2. Plot ACF data jumlah kebakaran akibat gas elpiji

Distribusi prior parameter model data banyaknya kebakaran yang disebabkan gas elpiji adalah sekawan, maka dapat ditentukan dengan persamaan (2.2) yaitu

$$\alpha^{1-a}(1-\alpha)^{1-b}\,\lambda^{c-1}\exp(-d\lambda). \qquad (4.1)$$

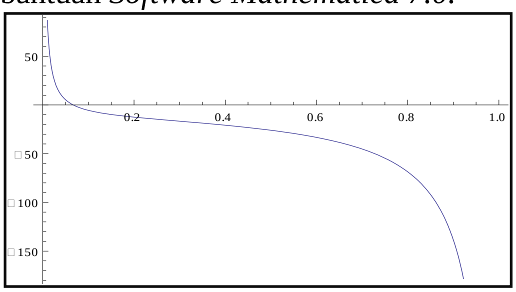
dengan a=b=c=d=10^{-4}. Distribusi posterior bersyarat penuh untuk parameter α dapat ditentukan dengan persamaan (2.6) dan (4.1) dan diperoleh:

$$\begin{aligned} p(\alpha|\lambda,X) = \alpha^{1-a}(1-\alpha)^{1-b}(\lambda^3)\Bigg(&((1-\alpha)^6)\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\Bigg(\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\alpha)^3+3\lambda\alpha(1-\alpha)^2 \\ &+3\alpha^2(1-\alpha)\Bigg)\left(\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\alpha)+\lambda\alpha\right)\left(\lambda(1-\alpha)^2+2\alpha(1-\alpha)\right)\Bigg(\left(\frac{\lambda^3}{6}\right)(1-\alpha) \\ &+\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\alpha\Bigg)\Bigg). \qquad (4.2) \end{aligned}$$

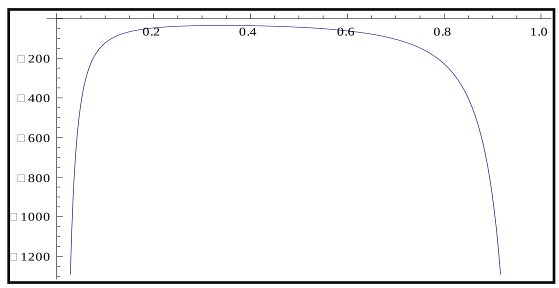
Sedangkan distribusi posterior untuk parameter λ, dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.5) dan diperoleh:

$$p(\lambda|\alpha,X)=(\mathrm{Exp}[-(d+39)\lambda]\lambda^{c-1})(\lambda^{3})\left(((1-x)^{6})\left(\frac{\lambda^{2}}{2}\right)\left(\left(\frac{\lambda^{2}}{2}\right)(1-x)^{3}+3\lambda x(1-x)^{2}\right.\right.$$
$$\left.+3x^{2}(1-x)\right)\left(\left(\frac{\lambda^{2}}{2}\right)(1-x)+\lambda x\right)\left(\lambda(1-x)^{2}+2x(1-x)\right)\left(\left(\frac{\lambda^{3}}{6}\right)(1-x)\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\lambda^{2}}{2}\right)x\right)\right). \qquad (4.3)$$

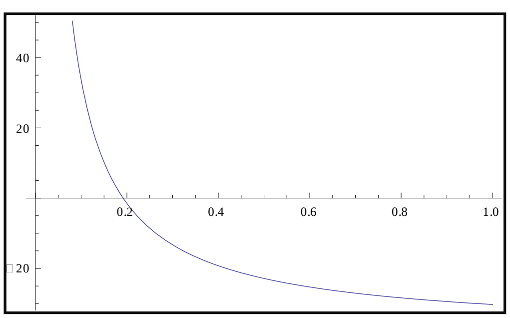
Perhitungan untuk harga harapan estimator parameter model diperoleh dari persamaan (2.9) dan (2.10). Penyampelan dari distribusi probabilitas $f(\alpha|\lambda,X)$ dan $f(\lambda|\alpha,X)$ dilakukan dengan proses Markov. Distribusi posterior bersyarat penuh persamaan (4.2) dan (4.3) mempunyai bentuk distribusi yang tidak umum dan mempunyai bentuk aljabar yang rumit, sehingga *Gibbs sampling* tidak efektif digunakan. Sehingga penyampelan dilakukan dengan algoritma *Adaptive Rejection Sampling (ARS).* Distribusi posterior bersyarat penuh dari masing-masing parameter akan ditunjukkan terlebih dahulu apakah log-konkav atau tidak terlebih dahulu dengan melihat Gambar 4.3-4.6. Dalam penelitian ini plot Distribusi posterior digambar dengan bantuan *Software Mathematica 7.0.*



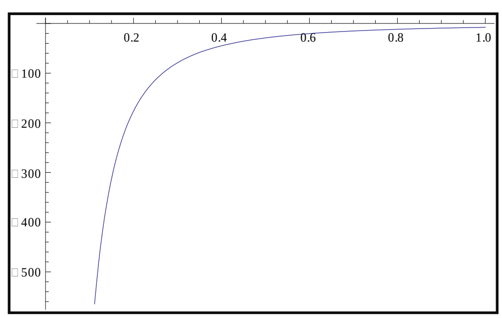
Gambar 4.3. Plot fungsi $p'(\alpha|\lambda,X)/p(\alpha|\lambda,X)$



Gambar 4.4. Plot turunan kedua dari fungsi log $p(\alpha|\lambda,X)$



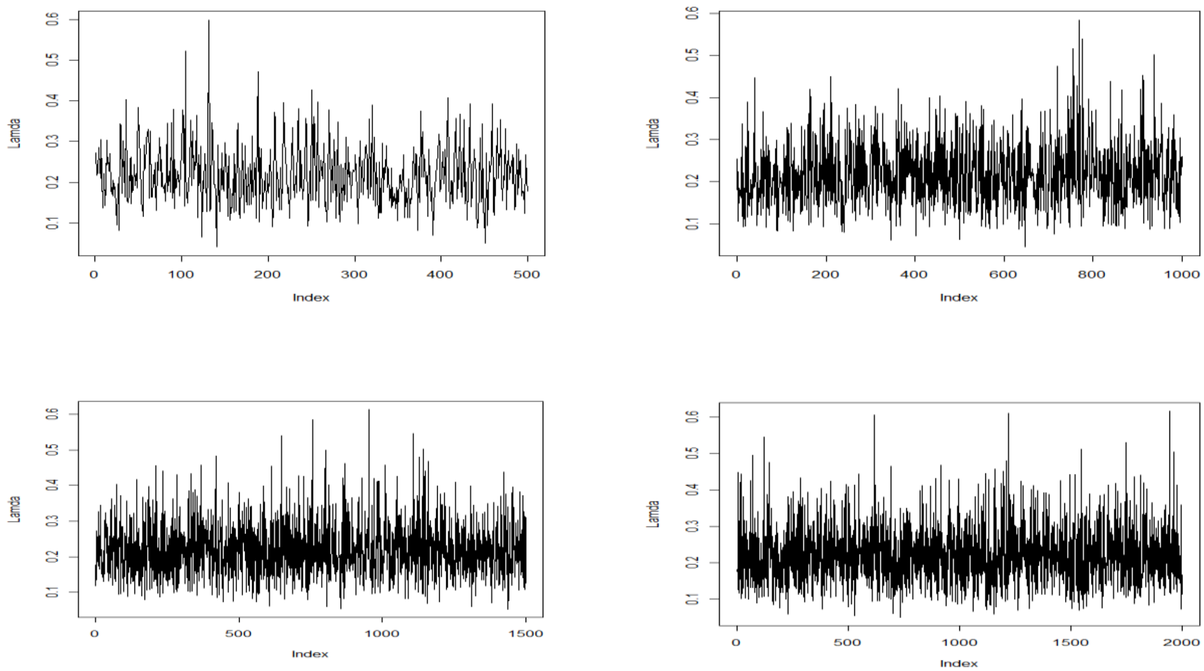
Gambar 4.5. Plot fungsi $p'(\lambda|\alpha,X)/p(\lambda|\alpha,X)$



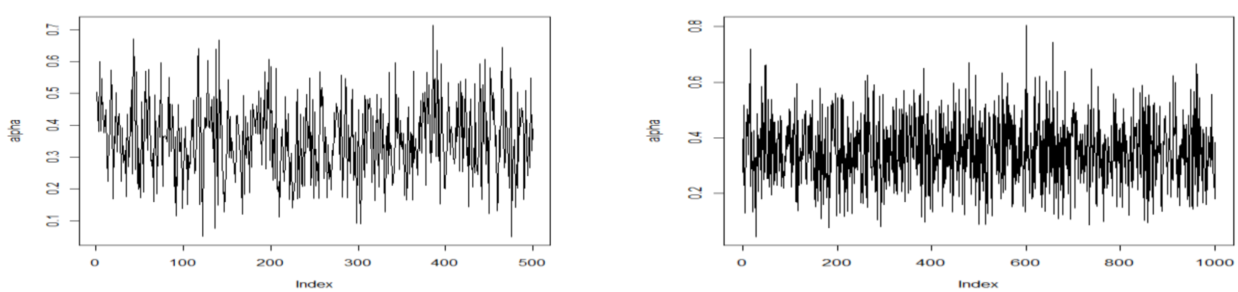
Gambar 4.6. Plot turunan kedua dari fungsi log $p(\lambda|\alpha,X)$

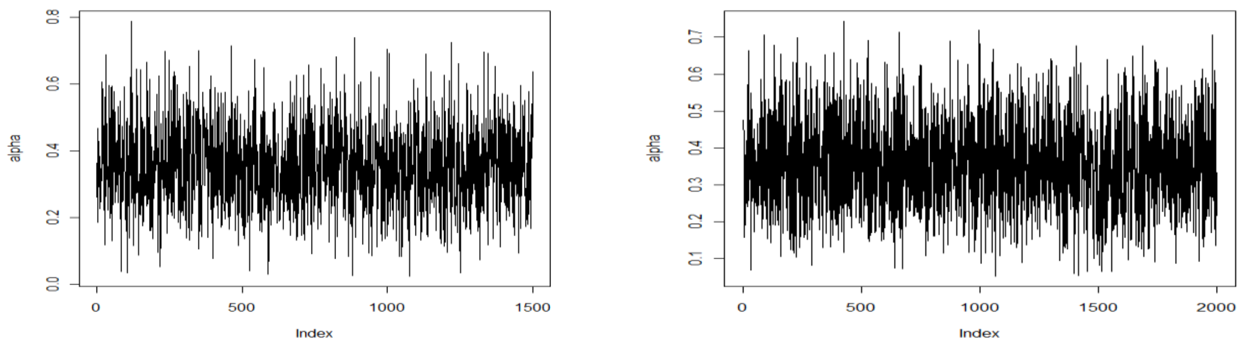
Dari Gambar 4.3- 4.6 fungsi $(\ln p(\lambda|\alpha,X))'' < 0$ dan $\ln p(\alpha|\lambda,X)'' < 0$, selain itu $p'(\alpha|\lambda,X)/p(\alpha|\lambda,X)$ dan $p'(\lambda|\alpha,X)/p(\lambda|\alpha,X)$ adalah monoton turun, sehingga dapat disimpulkan fungsi densitas bersyarat penuh dari masing-masing parameter adalah log-konkav.

Persamaan (4.2) dan (4.3) digunakan untuk membangkitkan rantai Markov α dan λ dengan algoritma *ARS*. Karena distribusi bersyarat penuh dari masing-masing parameter berdimensi tinggi, maka dalam pembangkitan rantai Markov menggunakan bantuan *Software R i 386 3.1.0*. Hasil penyampelan α dan λ dengan algoritma *ARS* dapat dilihat pada Gambar 4.7 dan 4.8.



Gambar 4.7. Hasil pembangkitan $\hat{\lambda}$ dengan algoritma *ARS*





Gambar 4.7. Hasil pembangkitan $\hat{\alpha}$ dengan algoritma *ARS*

Nilai-nilai parameter $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\lambda}$ hasil dari algoritma *ARS* pada Gambar 4.6 dan 4.7 tersebut dirata-rata dan dapat dilihat dalam Tabel 4.1 berikut.

Tabel 4.1. Nilai-nilai estimasi parameter model *INAR(1)*

n	500	1000	1500	2000
$\hat{\alpha}$	0.3553508	0.3510232	0.3544695	0.3590519
Var($\hat{\alpha}$)	0.01471053	0.01426808	0.01596184	0.01535400
$\hat{\lambda}$	0.2162062	0.215927	0.2193368	0.2201274
Var($\hat{\lambda}$)	0.005703463	0.006094719	0.00605766	0.006016407

Dari Tabel 4.1, persamaan (2.9) dan persamaan (2.10) dapat diperoleh nilai $\hat{\alpha}$=0.35497 dan $\hat{\lambda}$=0.21789, yang artinya bahwa pada bulan sebelum kejadian kebakaran terjadi, kejadian tersebut memiliki probabilitas tidak terjadi kebakaran sebesar 0.35497, dan rata-rata banyaknya kejadian kebakaran akibat gas elpiji di kota Surakarta adalah satu kali dalam dua bulan. Dari parameter tersebut dapat dihitung besar probabilitas terjadinya kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji di kota Surakarta adalah $(1 - \hat{\alpha})$ = 0.64503.

KESIMPULAN

Berdasar hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa model jumlah kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji di kota Surakarta adalah model *INAR (1).*Hasil estimasi parameter model *INAR (1)* adalah $\hat{\alpha}$=0.35497 dan $\hat{\lambda}$=0.21789, yang artinya bahwa pada bulan sebelum kejadian kebakaran terjadi, kejadian tersebut memiliki probabilitas tidak terjadi kebakaran sebesar 0.35497, dan rata-rata banyaknya kejadian kebakaran akibat gas elpiji di kota Surakarta adalah satu kali dalam dua bulan. Besar probabilitas terjadinya kebakaran yang disebabkan oleh gas elpiji di kota Surakarta adalah $(1 - \hat{\alpha})$ = 0.64503.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J. and M. Engelhardt, (1995), *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, 2 ed., Duxbury Press, Inc., California.

Bagnoli, M. and T. Bergstrom, *Log-Concave Probability and Its Aplications*, University of Michigan. http://citeseerx.its.psu.edu. (Diakses pada tanggal 27-4-2010, jam 11.30), 1989.

Berger, J. O, *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis,* 2 ed., Springer- Verlag, Inc., New York, 1980.

Brannas, K, *Estimation and Testing in integer-valued AR (1) models*. Umea Economic Studies 335. Umea University, Sweden, 1994.

Fink, D, *A Compendium of Conjugate Priors.* Department of Biology. Montana State University, Bozeman, 1997.

Gilks, W. R. and Wild, P, *Adaptive Rejection Sampling for Gibbs Sampling,* Appl. Statist., 41, 337-348, 1992.

Silva, I., M.E. Silva, I. Pereira and N. Silva, *Replicated INAR(1) processes*. Methodology and Computing in applied Probability, Vol.7,pp.517-542, 2005.

Badan Pusat Statistik Kota Surakarta, (2012), *Surakarta Dalam Angka Tahun 2012*. Surakarta.

Walsh, B, (2004), *Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling*, Lecture Notes for EEB 581. http://web.mit.edu/~wingated/www/introductions/mcmc-gibbs-intro.pdf. (Diakses pada tanggal 12-11-2013, jam 15.29)